

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

**УТВЕРЖДАЮ**

Заведующий кафедрой  
цифровых технологий



Кургалин С. Д.

03.05.2023 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**Б1.О.13 Математический анализ**

- 1. Код и наименование направления подготовки:**  
10.03.01 Информационная безопасность
- 2. Профиль подготовки:**  
Безопасность компьютерных систем.
- 3. Квалификация выпускника:**  
бакалавр
- 4. Форма обучения:** очная
- 5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины:**  
кафедра цифровых технологий
- 6. Составители программы:**  
Сирота Е.А., кандидат физико-математических наук, доцент;
- 7. Рекомендована:**  
НМС ФКН (протокол № 7 от 03.05.23)
- 8. Учебный год:** 2023-2024                      **Семестр:** 1

## 9. Цели и задачи учебной дисциплины

Целями освоения учебной дисциплины являются:

- изучение основ дифференциального исчисления;
- изучение основ интегрального исчисления.

Задачи учебной дисциплины:

- обучение классическим и современным методам математических исследований, рассмотрение результатов и идей, необходимых для изучения других математических дисциплин; выработка навыков обращения с изучаемым математическим аппаратом;
- воспитание критического восприятия математических высказываний, повышение стандартов математической строгости и понимания практической обоснованности изучаемого материала и выбранного уровня строгости изложения;
- развитие математической интуиции, точности выполнения математических операций и совершенствование общей культуры мышления.

## 10. Место учебной дисциплины в структуре ООП:

Дисциплина относится к обязательной части учебного плана.

## 11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями) и индикаторами их достижения:

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-3	Способен использовать необходимые математические методы для решения задач профессиональной деятельности	ОПК-3.1	знает основные понятия теории пределов и непрерывности функций одной и нескольких действительных переменных;	знать: основные понятия математического анализа и его методы, которые используются для построения моделей и конструирования алгоритмов решения практических задач;  уметь: применять методы математического анализа для решения практических задач;  владеть: навыками квалифицированного выбора и адаптации существующих методов для решения практических задач
		ОПК-3.2	знает основные методы дифференциального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных;	
		ОПК-3.3	знает основные методы интегрального исчисления функций одной и нескольких действительных переменных;	
		ОПК-3.4	знает основные методы исследования числовых и функциональных рядов;	

		ОПК-3.5	знает основные задачи теории функций комплексного переменного;	
		ОПК-3.6	знает основные типы обыкновенных дифференциальных уравнений и методы их решения;	
		ОПК-3.7	умеет исследовать функциональные зависимости, возникающие при решении стандартных прикладных задач;	
		ОПК-3.8	умеет использовать типовые модели и методы математического анализа при решении стандартных прикладных задач;	
		ОПК-3.9	владеет навыками типовых расчетов с использованием основных формул дифференциального и интегрального исчисления;	
		ОПК-3.10	владеет навыками использования справочных материалов по математическому анализу.	

**12. Объем дисциплины в зачетных единицах/час — 5/180.**

**Форма промежуточной аттестации: экзамен**

**13. Трудоемкость по видам учебной работы**

Вид учебной работы		Трудоемкость	
		Всего	По семестрам
			1 семестр
Аудиторные занятия		68	68
в том числе:	лекции	34	
	практические	34	
	лабораторные		

Самостоятельная работа	76	76
в том числе: курсовая работа (проект)		
Форма промежуточной аттестации (экзамен)	36	36
Итого:	180	180

### 13.1. Содержание дисциплины

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК*
<b>1. Лекции</b>			
1.1	Теория множеств. Числовые множества	Множества. Операции над множествами. Свойства операций пересечения, объединения, разности, декартового произведения. Множество натуральных чисел. Метод математической индукции. Понятие отображения. Счетные множества. Множество целых чисел, множество рациональных чисел. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества вещественных чисел. Модуль, абсолютная величина числа. Промежутки, окрестности. Принцип вложенных отрезков. Элементарные функции вещественного переменного. Бином Ньютона. Ограниченные множества. Точные грани множеств. Свойства точной верхней и нижней грани множества. Понятие последовательности и подпоследовательности.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
1.2	Числовые последовательности	Вещественные числа, Supremum, Infimum, Принцип вложенных промежутков, Предельная точка множества. Предел последовательности. Частичный предел. Верхний и нижний пределы.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
1.3	Понятие функции одной переменной. Предел функции	Понятие функции одной переменной. Определение, способы задания, функции, заданные с помощью логических выражений. Предел функции по Коши и по Гейне. Эквивалентность определений. Односторонние пределы. Существование односторонних пределов у монотонных функций. Свойства пределов функций. Бесконечно малые (большие) функции, их сравнение. Замечательные пределы. Построение графиков функций.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
1.4	Понятие производной и первого дифференциала функции. Формула Тейлора.	Производная функции. Геометрический и физический смысл. Дифференцирование элементарных функций. Правила дифференцирования. Производная обратной и сложной функции. Первый дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы Ферма, Ролля. Теоремы о среднем Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>

		<p>Формула Тейлора. Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Выпуклые и вогнутые функции. Точки перегиба. Признаки точек перегиба.</p> <p>Исследование свойств функций с помощью производных.</p>	
1.5	Интегрирование функций одной переменной	<p>Первообразная функции, свойства первообразных. Неопределенный интеграл. Формула замены переменных, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных и иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических и других трансцендентных функций. Определенный интеграл Римана. Условие существования интеграла Римана. Формула Ньютона—Лейбница. Свойства интегрируемой функции. Теорема о среднем. Формула замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле.</p> <p>Понятие о несобственном интеграле.</p>	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
1.6	Числовые ряды. Функциональные ряды	<p>Числовые ряды. Частичные суммы. Сходимость. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Признаки Абеля и Дирихле. Функциональные ряды и последовательности. Равномерная и неравномерная сходимость. Условие равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование функциональных рядов. Степенные ряды. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда.</p>	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
<b>2. Практические занятия</b>			
2.1	Теория множеств. Числовые множества	<p>Множества. Операции над множествами. Свойства операций пересечения, объединения, разности, декартового произведения. Множество натуральных чисел. Метод математической индукции. Понятие отображения. Счетные множества. Множество целых чисел, множество рациональных чисел. Счетность множества рациональных чисел. Несчетность множества вещественных чисел. Модуль, абсолютная величина числа. Промежутки, окрестности. Принцип вложенных отрезков.</p> <p>Элементарные функции вещественного переменного. Бином Ньютона. Ограниченные множества. Точные грани множеств. Свойства точной верхней и нижней грани множества. Понятие последовательности и подпоследовательности.</p>	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
2.2	Числовые последовательности	<p>Вещественные числа, Supremum, Infimum, Принцип вложенных промежутков, Предельная точка множества. Предел последовательности. Частичный предел. Верхний и нижний пределы.</p>	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>

2.3	Понятие функции одной переменной. Предел функции	Понятие функции одной переменной. Определение, способы задания, функции, заданные с помощью логических выражений. Предел функции по Коши и по Гейне. Эквивалентность определений. Односторонние пределы. Существование односторонних пределов у монотонных функций. Свойства пределов функций. Бесконечно малые (большие) функции, их сравнение. Замечательные пределы. Построение графиков функций.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
2.4	Понятие производной и первого дифференциала функции. Формула Тейлора.	Производная функции. Геометрический и физический смысл. Дифференцирование элементарных функций. Правила дифференцирования. Производная обратной и сложной функции. Первый дифференциал функции. Производные и дифференциалы высших порядков. Теоремы Ферма, Ролля. Теоремы о среднем Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей. Формула Тейлора. Остаточный член в формуле Тейлора в форме Лагранжа. Экстремум функции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Выпуклые и вогнутые функции. Точки перегиба. Признаки точек перегиба. Исследование свойств функций с помощью производных.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
2.5	Интегрирование функций одной переменной	Первообразная функции, свойства первообразных. Неопределенный интеграл. Формула замены переменных, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных и иррациональных функций. Интегрирование тригонометрических и других трансцендентных функций. Определенный интеграл Римана. Условие существования интеграла Римана. Формула Ньютона—Лейбница. Свойства интегрируемой функции. Теорема о среднем. Формула замены переменной и интегрирования по частям в определенном интеграле. Понятие о несобственном интеграле.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>
2.6	Числовые ряды. Функциональные ряды	Числовые ряды. Частичные суммы. Сходимость. Свойства сходящихся рядов. Критерий Коши. Признаки сходимости рядов с положительными членами. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Знакопеременные ряды. Признаки Абеля и Дирихле. Функциональные ряды и последовательности. Равномерная и неравномерная сходимость. Условие равномерной сходимости функционального ряда. Непрерывность, дифференцирование и интегрирование функциональных рядов. Степенные ряды. Область сходимости и радиус сходимости степенного ряда.	<a href="https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889">https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=11889</a>

### 13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий

№ п/п	Наименование темы (раздела) дисциплины	Виды занятий (количество часов)			
		Лекции	Практические/ Лабораторные	Самостоятель ная работа	Всего
1	Теория множеств. Числовые множества	6	6	12	24
2	Числовые последовательности	6	6	12	24
3	Понятие функции одной переменной. Предел функции	6	6	12	24
4	Понятие производной и первого дифференциала функции. Формула Тейлора.	6	6	12	24
5	Интегрирование функций одной переменной	6	6	12	24
6	Числовые ряды. Функциональные ряды	4	4	16	24
		34	34	76	144

### 14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Освоение дисциплины складывается из аудиторной работы (учебной деятельности, выполняемой под руководством преподавателя) и внеаудиторной работы (учебной деятельности, реализуемой обучающимся самостоятельно).

Аудиторная работа состоит из работы на лекциях и выполнения практических заданий в объёме, предусмотренном учебным планом. Лекция представляет собой последовательное и систематическое изложение учебного материала, направленное на знакомство обучающихся с основными понятиями и теоретическими положениями изучаемой дисциплины.

Лекционные занятия формируют базу для практических занятий, на которых полученные теоретические знания применяются для решения конкретных практических задач. Обучающимся для успешного освоения дисциплины рекомендуется вести конспект лекций и практических занятий.

Самостоятельная работа предполагает углублённое изучение отдельных разделов дисциплины с использованием литературы, рекомендованной преподавателем, а также конспектов лекций, конспектов практических занятий. В качестве плана для самостоятельной работы может быть использован раздел 13.1 настоящей рабочей программы, в котором зафиксированы разделы дисциплины и их содержание. В разделе 13.2 рабочей программы определяется количество часов, отводимое на самостоятельную работу по каждому разделу дисциплины. Больше количество часов на самостоятельную работу отводится на наиболее трудные разделы дисциплины. Для самостоятельного изучения отдельных разделов дисциплины используется перечень литературы и других ресурсов, перечисленных в пунктах 15 и 16 настоящей рабочей программы.

Обязательным элементом самостоятельной работы является выполнение домашнего задания.

Успешность освоения дисциплины определяется систематичностью и глубиной аудиторной и внеаудиторной работы обучающегося.

При использовании дистанционных образовательных технологий и электронного обучения требуется выполнять все указания преподавателей, вовремя подключаться к онлайн-занятиям, ответственно подходить к заданиям для самостоятельной работы.

В рамках дисциплины предусмотрено проведение трёх текущих аттестаций за семестр. Результаты текущей успеваемости учитываются при выставлении оценки по промежуточной аттестации в соответствии с положением П ВГУ 2.1.04.16–2019 «Положение о текущей и промежуточной аттестации знаний, умений и навыков обучающихся на факультете компьютерных наук Воронежского государственного университета с использованием балльно-рейтинговой системы».

Обучение лиц с ограниченными возможностями здоровья осуществляется с учетом их индивидуальных психофизических особенностей и в соответствии с индивидуальной программой реабилитации. Для лиц с нарушением слуха при необходимости допускается присутствие на лекциях и практических занятиях ассистента, а также сурдопереводчиков и тифлосурдопереводчиков. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями слуха проводится в письменной форме, при этом используются общие критерии оценивания. При необходимости время подготовки на зачете может быть увеличено. Для лиц с нарушением зрения допускается аудиальное предоставление информации (например, с использованием программ-синтезаторов речи), а также использование на лекциях звукозаписывающих устройств (диктофонов и т.д.). На лекциях и практических занятиях при необходимости допускается присутствие ассистента. При проведении промежуточной аттестации для лиц с нарушением зрения тестирование может быть заменено на устное собеседование по вопросам. При необходимости время подготовки на экзамене может быть увеличено. Для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата при необходимости допускается присутствие ассистента на лекциях и практических занятиях. Промежуточная аттестация для лиц с нарушениями опорно-двигательного аппарата проводится на общих основаниях, при необходимости процедура экзамена может быть реализована дистанционно.

## 15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа В 2-х тт. том 1-й. [Электронный ресурс] : учебник. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2008. — 441 с. — Режим доступа: <a href="http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=410">http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=410</a>
2	Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. том 2-й. [Электронный ресурс] : учебник. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2008. — 466 с. — Режим доступа: <a href="http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=411">http://lanbook.lib.vsu.ru/books/element.php?pl1_id=411</a>

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1	Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — 25-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 624 с. — ISBN 978-5-507-47148-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/332675">https://e.lanbook.com/book/332675</a> (дата обращения: 01.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей. 2 Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 492 с. — ISBN 978-5-507-46033-5. — Текст : электронный // Лань :



	электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/295943">https://e.lanbook.com/book/295943</a> (дата обращения: 01.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 492 с. — ISBN 978-5-507-46033-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/295943">https://e.lanbook.com/book/295943</a> (дата обращения: 01.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей

в) информационные электронно-образовательные ресурсы (официальные ресурсы интернет):

№ п/п	Ресурс
1	ЗНБ ВГУ: <a href="https://lib.vsu.ru/">https://lib.vsu.ru/</a>
2	Электронно-библиотечная система "Университетская библиотека online": <a href="http://biblioclub.ru/">http://biblioclub.ru/</a>
3	Электронно-библиотечная система "Лань": <a href="https://e.lanbook.com/">https://e.lanbook.com/</a>
4	Электронно-библиотечная система "Консультант студента": <a href="http://www.studmedlib.ru">http://www.studmedlib.ru</a>
5	Электронный университет ВГУ: <a href="https://edu.vsu.ru/">https://edu.vsu.ru/</a>

## 16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы

№ п/п	Источник
1	Демидович, Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — 25-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 624 с. — ISBN 978-5-507-47148-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/332675">https://e.lanbook.com/book/332675</a> (дата обращения: 01.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей. 2 Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 492 с. — ISBN 978-5-507-46033-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/295943">https://e.lanbook.com/book/295943</a> (дата обращения: 01.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей.
2	Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — 11-е изд., стер. — Санкт-Петербург : Лань, 2023. — 492 с. — ISBN 978-5-507-46033-5. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <a href="https://e.lanbook.com/book/295943">https://e.lanbook.com/book/295943</a> (дата обращения: 01.05.2023). — Режим доступа: для авториз. пользователей

## 17. Образовательные технологии, используемые при реализации учебной дисциплины, включая дистанционные образовательные технологии (ДОТ, электронное обучение (ЭО), смешанное обучение)

При реализации дисциплины могут использоваться технологии электронного обучения и дистанционные образовательные технологии на базе портала [edu.vsu.ru](http://edu.vsu.ru), а также другие доступные ресурсы сети Интернет.

## 18. Материально-техническое обеспечение дисциплины

Аудитория для лекционных занятий: мультимедиа-проектор, экран для проектора, компьютер с выходом в сеть «Интернет». Специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

Аудитория для практических занятий: специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска).

Аудитория для лабораторных занятий: компьютеры с выходом в сеть «Интернет» и доступом к электронным библиотечным системам, специализированная мебель (столы ученические, стулья, доска). Программное обеспечение: LibreOffice v.5-7, программа для просмотра файлов формата pdf, браузер.

## 19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1	Теория множеств. Числовые множества	ОПК-3	ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3, ОПК-3.4, ОПК-3.5, ОПК-3.6, ОПК-3.7, ОПК-3.8, ОПК-3.9, ОПК-3.10	Контрольная работа
2	Числовые последовательности	ОПК-3	ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3, ОПК-3.4, ОПК-3.5, ОПК-3.6, ОПК-3.7, ОПК-3.8, ОПК-3.9, ОПК-3.10	Контрольная работа
3	Понятие функции одной переменной. Предел функции	ОПК-3	ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3, ОПК-3.4, ОПК-3.5, ОПК-3.6, ОПК-3.7, ОПК-3.8, ОПК-3.9, ОПК-3.10	Контрольная работа
4	Понятие производной и первого дифференциала функции. Формула Тейлора.	ОПК-3	ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3, ОПК-3.4, ОПК-3.5, ОПК-3.6, ОПК-3.7, ОПК-3.8, ОПК-3.9, ОПК-3.10	Контрольная работа
5	Интегрирование функций одной переменной	ОПК-3	ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3, ОПК-3.4, ОПК-3.5, ОПК-3.6, ОПК-3.7, ОПК-3.8, ОПК-3.9, ОПК-3.10	Контрольная работа
6	Числовые ряды. Функциональные ряды	ОПК-3	ОПК-3.1, ОПК-3.2, ОПК-3.3, ОПК-3.4, ОПК-3.5, ОПК-3.6, ОПК-3.7, ОПК-3.8, ОПК-3.9, ОПК-3.10	Контрольная работа
Промежуточная аттестация форма контроля - экзамен				Перечень вопросов к экзамену

## 20. Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

### 20.1. Текущий контроль успеваемости

Контроль успеваемости по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: контрольная работа.

#### Перечень заданий для контрольных работ

##### Контрольная работа № 1

###### Вариант 1

1. Докажите с помощью метода математической индукции, что  $n^2 - 6n + 12 > 0$  для любого  $n \in N$ .
2. Пусть  $X$  непустое, ограниченное множество,  $-X$  – множество элементов вида  $-x$  ( $x \in X$ ). Докажите, что
$$\inf(-X) = -\sup X.$$
3. Используя определение предела числовой последовательности, доказать, что число 1 является пределом последовательности  $x_n = n/(n+1)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ).
4. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n^2 + n} - n \right).$$

###### Вариант 2

1. Докажите с помощью метода математической индукции, что  $4n^2 - 12n + 9 \geq 0$  для любого  $n \in N$ .
2. Пусть  $X, Y$  непустые, ограниченные множества положительных чисел,  $Z$  – множество элементов вида  $z = x \cdot y$  ( $x \in X, y \in Y$ ). Докажите, что
$$\inf Z = \inf X \cdot \inf Y.$$
3. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5^n}{n^n} \right) = 0.$$

4. Найти

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \right).$$

##### Контрольная работа №2

###### Вариант 1

1. Определить области существования и множество значений следующей функции
  - а.  $y = (-1)^x$ .
2. Найти  $\varphi(\varphi(x)), \psi(\psi(x)), \varphi(\psi(x)), \psi(\varphi(x))$ , если
  - а.  $\varphi(x) = x^2, \psi(x) = 2^x$ .

3. Выяснить, является ли функция периодической, и определить ее наименьший период, если

a.  $f(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x$ .

4. Найти

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, \quad m, n \in \mathbb{N}$ .

5. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}.$$

### Вариант 2

1. Определить области существования и множество значений следующей функции

$$y = \arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right).$$

2. Найти  $\varphi(\varphi(x))$ ,  $\psi(\psi(x))$ ,  $\varphi(\psi(x))$ ,  $\psi(\varphi(x))$ , если

$$\varphi(x) = \operatorname{sgn} x, \quad \psi(x) = \frac{1}{x}.$$

3. Выяснить, является ли функция периодической, и определить ее наименьший период, если

$$f(x) = \sin x + \sin(x\sqrt{2}).$$

4. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

5. Найти

$$\lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

### Контрольная работа №3

#### Вариант 1

1. Найти предел

a.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$

2. С помощью « $\varepsilon - \delta$ » рассуждений доказать непрерывность функции

a.  $y = \sin x$

3. Определить точки разрыва функции и исследовать характер этих точек, если

a.  $y = \frac{x}{\sin x}$

4. Исходя из определения производной, непосредственно найти производную функции

$$\text{a. } y = \frac{1}{x}.$$

5. Найти производную функции

$$y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$$

### Вариант 2

1. Найти предел

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

2. С помощью « $\varepsilon - \delta$ » рассуждений доказать непрерывность функции

$$\text{a. } y = \cos x$$

3. Определить точки разрыва функции и исследовать характер этих точек, если

$$\text{a. } y = \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}}$$

4. Исходя из определения производной, непосредственно найти производную функции

$$\text{a. } y = \sqrt{x}.$$

5. Найти производную функции

$$y = \frac{x^p(1-x)^q}{1+x}$$

### Контрольная работа №4

#### Вариант 1

1. Найти дифференциал функции  $y$

$$\text{a. } y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

2. Пусть  $u$  и  $v$  дважды дифференцируемые функции от переменной  $x$ . Найти  $d^2y$ , если

$$\text{a. } y = u^m v^n$$

3. Определить значение выражения

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

4. Определить значение выражения

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0.01x}.$$

5. Найти разложение в ряд Тейлора по степеням  $x$  функции

$$y = \ln(1 + 3x + 2x^2)$$

### Вариант 2

1. Найти дифференциал функции  $y$

а.  $y = \ln|x + \sqrt{x^3 + a}|$

2. Пусть  $u$  и  $v$  дважды дифференцируемые функции от переменной  $x$ . Найти  $d^2y$ , если

а.  $y = a^u$ , ( $a > 0$ )

3. Определить значение выражения

а.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{ctg} x - 1}{x^2}$

4. Определить значение выражения

а.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^{x^{x-1}}$

5. Найти разложение в ряд Тейлора по степеням  $x$  функции

$y = x \cos 3x$

### Контрольная работа №5

#### Вариант 1

1. Найти интеграл

а.  $\int \frac{(1-x)^3}{x^3 \sqrt{x}} dx.$

2. Найти интеграл

а.  $\int \sin \frac{1}{x} \frac{dx}{x^2}.$

3. Найти интеграл

а.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}.$

4. Найти интеграл

а.  $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$

5. Найти интеграл

$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$

#### Вариант 2

1. Найти интеграл

а.  $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \sqrt{x} \sqrt{x} dx.$

2. Найти интеграл

а.  $\int \frac{dx}{x(x^2 - 1)}.$

3. Найти интеграл

$$a. \int \frac{dx}{\sin x \cos^3 x}.$$

4. Найти интеграл

$$a. \int x \ln \frac{1+x}{1-x} dx.$$

5. Найти интеграл

$$\int \frac{dx}{3x^2 - 2x - 1}.$$

### Контрольная работа №6

#### Вариант 1

1. Доказать непосредственно сходимость ряда и найти его сумму 2546

$$a. 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + \dots$$

2. Исследовать сходимость ряда 2556

$$a. 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

3. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда

$$a. \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \dots + \frac{\sin nx}{2^n} + \dots$$

4. Исследовать сходимость ряда 2583

$$a. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

5. Исследовать сходимость знакопеременного ряда 2668

$$a. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$$

#### Вариант 2

1. Доказать непосредственно сходимость ряда и найти его сумму 2547

$$a. \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) + \dots$$

2. Исследовать сходимость ряда 2558

$$a. \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

3. Пользуясь Критерием Коши, доказать расхождение ряда 2577.1

$$a. \frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot (n+1)}} + \dots$$

4. Исследовать сходимость ряда 2584

$$a. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

5. Исследовать сходимость знакопеременного ряда 2669

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$$

### Критерии оценивания контрольных работ

- 0-24 балла — «неудовлетворительно»
- 25-34 балла — «удовлетворительно»
- 35-44 балла — «хорошо»
- 45-50 баллов — «отлично»

Приведённые ниже задания рекомендуется использовать при проведении диагностических работ для оценки остаточных знаний по дисциплине

### Задания с выбором ответа

№	Задание	Варианты ответа	Верный ответ
1	С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих всем трем множествам А, В, С.	1. $(A \cap B) \cap C$ 2. $(A \cup B) \cup C$ 3. $(A \cap B) \cup (C \cap B) \cup (A \cap C)$ .	4. $(A \cap B) \cap C$
2	С помощью операций объединения и пересечения записать множество, состоящее из элементов, принадлежащих хотя бы одному из трех множеств А, В, С.	1. $(A \cap B) \cap C$ 2. $(A \cup B) \cup C$ 3. $(A \cap B) \cup (C \cap B) \cup (A \cap C)$ .	4. $(A \cup B) \cup C$
3	Укажите область определения функции $y = \sqrt{5^{3x+1} - 1}$	1. $[-3; +\infty)$ 2. $\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$ 3. $(0; 3)$ 4. $[-3; 10)$	$\left[-\frac{1}{3}; +\infty\right)$
4	Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n^2}{n^3 + 1}$	1. 5 2. 0 3. 0.2 4. предела не существует.	5
5	Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - n)$	1. 0.2 2. 0 3. 0.5 4. предела не существует.	0.5
6	Вычислите производную функции $y = \sin(3x)$	1. $3x$ 2. $\sin(x)$ 3. $3\sin(3x)$ 4. 0	$3\sin(3x)$
7	Вычислите предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 15x}{\sin 3x}$	1. 2 2. 6 3. 5 4. 3 5. 1	5
8	Вычислите интеграл $\int \sin(ax) dx$	1. $\frac{1}{a} \cos ax + c$ 2. 0 3. $\cos ax$	$\frac{1}{a} \cos ax + c$
9	Вычислите определен-	1. 1 2. 0 3. 0.5	1



	ный интеграл $\int_1^e \ln x \, dx$		
10	Вычислите определенный интеграл $\int_1^2 \left( \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx$	1. $\frac{2}{3}(5\sqrt{2} - 4)$ 2. $5\sqrt{2} - 4$ 3. $5\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}(5\sqrt{2} - 4)$

### Задания с кратким ответом

№	Задание	Верный ответ
1	Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $X$ называется	Неопределенным интегралом
2	Табличный интеграл от $\int \frac{dx}{x}$ равен	$\int \frac{dx}{x}$
3	Дифференциал от $2x$ равен	$2x dx$
4	Если для всех $x$ из области определения функции $f(x)$ выполняется равенство $f(-x) = f(x)$ , то функция называется...	четной
5	Множество, которое не содержит элементов называется...	пустым

### Задания с развёрнутым ответом

#### **Задание 1.**

Используя определение предела числовой последовательности, доказать, что число 1 является пределом последовательности  $x_n = n/(n+1)$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ).

Решение.

Рассмотрим модуль разности

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}.$$

Возьмем произвольное число  $\varepsilon > 0$ . Неравенство  $|x_n - 1| < \varepsilon$  будет выполнено, если  $1/(n+1) < \varepsilon$ , т.е. при  $n > 1/\varepsilon - 1$ . В качестве  $N$  возьмем какое-нибудь натуральное число, удовлетворяющее условию  $N > 1/\varepsilon - 1$ , тогда  $1/(N+1) < \varepsilon$  и для всех  $n \geq N$  выполнены неравенства

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{N+1} < \varepsilon.$$

Это и означает, что 1 есть предел последовательности  $\{n/(n+1)\}$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

**Задание 2.** Используя определение предела числовой последовательности, доказать, что последовательность  $\{(-1)^n + 1/n\}$  расходится.

Решение.

Нужно доказать, что никакое число не является пределом данной последовательности.

Отметим на числовой прямой несколько членов последовательности, например,

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 3/2, \quad x_3 = -2/3, \quad x_4 = 5/4, \quad x_5 = -4/5, \quad x_6 = 7/6, \quad x_{12} = 13/12, \quad x_{13} = -12/13.$$

Рис. 1 показывает, что расстояние между двумя соседними членами последовательности больше 1.



Рис.1

Докажем, что это действительно так для любых двух соседних членов. Из этих членов один имеет четный номер  $n = 2k$ , и

$$x_{2k} = -1 + 1/(2k) > -1.$$

Соседний член имеет нечетный номер  $2k+1$  (или  $2k-1$ ), и

$$x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1} < 0 \quad (\text{или } x_{2k-1} = -1 + \frac{1}{2k-1} \leq 0).$$

Отсюда следует, что  $|x_n - x_{n+1}| > 1$ .

Для произвольного числа  $a$  возьмем окрестность единичной длины – интервал  $(a - \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2})$

. Любые соседние члены  $x_n$  и  $x_{n+1}$  оба вместе не могут находиться в этой окрестности, так как расстояние между ними больше 1. По крайней мере один из этих членов будет лежать вне окрестности.

Таким образом, для любого числа  $a$  существует  $\varepsilon = 1/2$  такое, что для любого натурального  $N$  найдется  $n$ , равное либо  $N$ , либо  $N+1$  такое, что  $|x_n - a| > 1/2 = \varepsilon$ . Это и означает, что данная последовательность расходится.

**Задание 3.** Вычислите интеграл  $\int \sqrt{\frac{x}{\alpha-x}} dx$  ( $\alpha > 0$ )

Решение.

Подынтегральная функция определена на промежутке  $0 \leq x \leq \alpha$ . Сделаем замену переменной  $x = \alpha \sin^2 t$ , где  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ . Тогда:

$$\begin{aligned}
 dx &= 2\alpha \sin t \cos t dt \\
 \sin t &= \sqrt{\frac{x}{\alpha}} \\
 t &= \arcsin \sqrt{\frac{x}{\alpha}} \\
 \cos t &= \sqrt{1 - \frac{x}{\alpha}}
 \end{aligned}$$

Применяя формулу замены переменной

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt{\frac{x}{\alpha-x}} dx \Big|_{x = \alpha^2 \sin t} &= \int \frac{(\alpha^2 \sin t)}{\sqrt{\alpha - (\alpha^2 \sin t)}} d(\alpha^2 \sin t) = \int \frac{2 \sin^2 t}{\alpha - 2 \sin^2 t} 2\alpha \sin t \cos t dt = \\
 &= 2\alpha \int \left( \frac{\sin t}{\cos t} \sin t \cos t \right) dt = 2\alpha \int \sin^2 t dt = 2 \int (1 - \cos 2t) dt = \\
 &= 2 \left( t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + c = \alpha(t - \sin t \cos t) + c
 \end{aligned}$$

Возвращаясь от переменной  $t$  снова к переменной  $x$ , получаем:

$$\alpha \arcsin \sqrt{\frac{x}{\alpha}} - 2 \sqrt{\frac{x}{\alpha}} \sqrt{1 - \frac{x}{\alpha}} + c.$$

**Задание 4.** Используя формулу интегрирования по частям, найдите интеграл  $\int x e^x dx$

Решение.

$$\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + c$$

**Задание 5.** Найти предел функции, используя правило Лопиталья  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ .

Решение.

Правило Лопиталья  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ .

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} &= \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x \sin x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{\sin x}{3x} = \\
 &= -\frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Критерии оценивания	Баллы
Получен полный ответ, соответствующий указанному решению.	3

Имеется верная последовательность всех этапов решения, обоснованно получен верный ответ в случае алгоритма.	
Получен неполный ответ, в целом передающий суть задания. Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, при этом имеется верная последовательность всех этапов решения в случае алгоритма.	2
Получен верный ответ, однако имеются пропуски одного или двух этапов решения ИЛИ Решение не завершено, однако верно выполнен хотя бы один из этапов решения.	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

## 20.2. Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация по дисциплине осуществляется с помощью следующих оценочных средств: *вопросов к экзамену*.

Перечень вопросов к экзамену

1. Числовые множества. Операции над множествами;
2. Теоремы о точных гранях множеств;
3. Числовые последовательности. Бесконечно малая последовательность. Ограниченность БМП;
4. Сумма бесконечно малых последовательностей, разность, алгебраическая сумма, произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность;
5. Связь бесконечно малой и бесконечно большой последовательности;
6. Предел числовой последовательности. Необходимое и достаточное условие существования предела числовой последовательности. Теорема о единственности предела числовой последовательности;
7. Свойства пределов числовых последовательностей;
8. Предельный переход в неравенствах числовых последовательностей;
9. Теорема Вейерштрасса (для монотонной последовательности);
10. Теорема о вложенных отрезках;
11. Число  $\epsilon$ ;
12. Теорема о существовании предельной точки ограниченной последовательности;
13. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Лемма Бореля;
14. Верхний и нижний пределы ограниченной последовательности;
15. Условие Коши сходимости числовой последовательности;
16. Способы задания функций. Предел функции;
17. Эквивалентность определений предела функции;
18. Арифметические операции над пределами функций. Односторонние пределы;
19. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Следствие;
20. Сложная функция. Теорема о непрерывности сложной функции;
21. Понятие монотонной функции. Критерий непрерывности для монотонной функции;
22. Обратная функция. Теорема об обратной функции;
23. Основные классы функций;
24. Первый и второй замечательные пределы;
25. Сравнение бесконечно малых и бесконечно больших величин;
26. Классификация разрывов непрерывных функций;
27. Основные теоремы о непрерывных функциях (I и II теорема Вейерштрасса);

28. Условие Коши существования предела функции;
29. Понятие равномерно непрерывной функции. Теорема Кантора о равномерной непрерывности;
30. Производная функции. Геометрическая интерпретация. Понятие касательной и секущей;
31. Односторонняя производная;
32. Арифметические свойства производных;
33. Производная сложной функции. Производная обратной функции;
34. Производные элементарных функций. Производные обратных тригонометрических функций;
35. Производные логарифмической функции, показательной функции, степенной функции.
36. Дифференциал функции одной переменной. Основные определения, дифференциал приближенных вычислений;
37. Инвариантность формы первого дифференциала. Старшие производные. Формула Лейбница;
38. Дифференцирование функции, заданной параметрически;
39. Основные теоремы дифференциального исчисления (Теорема Ферма, теорема Ролля);
40. Теорема Лагранжа (частный случай). Теорема о достаточном условии монотонности функции;
41. Теорема Лагранжа (общий случай);
42. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей;
43. Формула Тейлора;
44. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа;
45. Разложение элементарных функций в ряды Тейлора-Маклорена;
46. Исследование функций. Второе достаточное условие экстремума функции.
47. Выпуклая и вогнутая функции. Условие выпуклости функции;
48. Первообразная функции. Основная теорема интегрального исчисления. Неопределенный интеграл.
49. Основные свойства неопределенных интегралов.
50. Замена переменной в неопределенном интеграле.
51. Интегрирование по частям.
52. Понятие определенного интеграла.
53. Геометрический смысл интегральной суммы. Физические примеры.
54. Суммы Дарбу. Первое свойство.
55. Второе свойство сумм Дарбу.
56. Третье и четвертое свойства сумм Дарбу.
57. Лемма Дарбу.
58. Необходимое и достаточное условие интегрируемости функции.
59. Классы интегрируемых функций. Интегрируемость непрерывных функций.
60. Интегрируемость некоторых разрывных функций.
61. Интегрируемость монотонных функций.
62. Свойства определенного интеграла.
63. Формула среднего значения.
64. Формула Ньютона-Лейбница.
65. Числовые ряды. Основные понятия.
66. Числовые ряды. Простейшие теоремы.
67. Сходимость положительных рядов. Условие сходимости положительного ряда. Гармонический ряд.
68. Теоремы сравнения рядов. Примеры.
69. Признаки Коши и Даламбера.
70. Абсолютная и условная сходимость рядов. Критерий Коши.

Для оценивания результатов обучения на экзамене используется 4-балльная шкала: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно», «неудовлетворительно».

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Полное соответствие ответа обучающегося всем перечисленным критериям. Обучающийся демонстрирует высокий уровень владения материалом, ориентируется в предметной области, верно отвечает на все дополнительные вопросы.	Повышенный уровень	Отлично
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует одному или двум из перечисленных показателей, но обучающийся дает правильные ответы на дополнительные вопросы. Допускаются ошибки при воспроизведении части теоретических положений.	Базовый уровень	Хорошо
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым трём из перечисленных показателей, обучающийся дает неполные ответы на дополнительные вопросы. Сформированные знания основных понятий, определений и теорем, изучаемых в курсе, не всегда полное их понимание с затруднениями при воспроизведении.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует любым четырём из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует отрывочные знания (либо их отсутствие) основных понятий, определений и теорем, используемых в курсе.	–	Неудовлетворительно